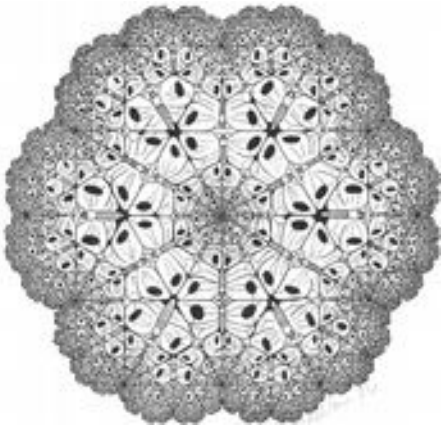
Sissejuhatus infotehnoloogiasse

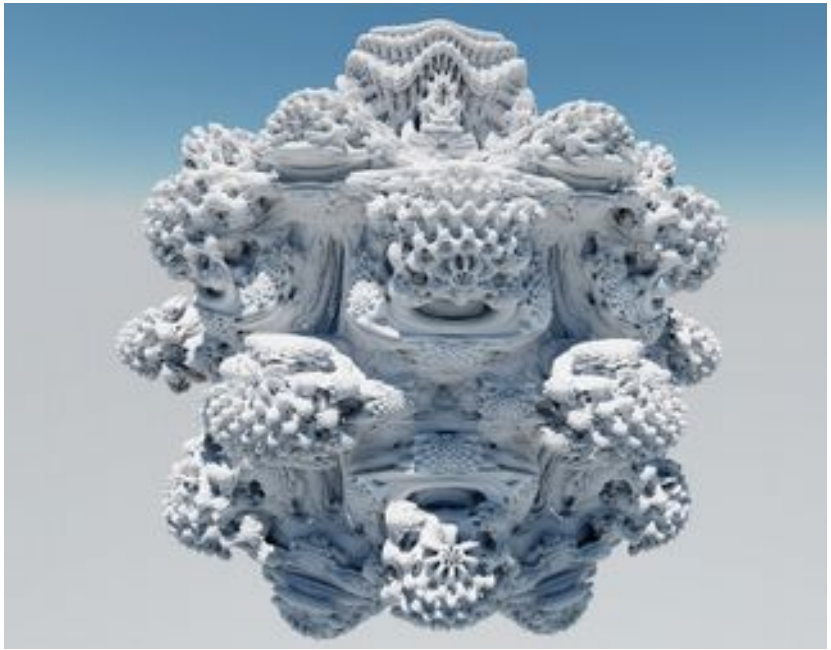


Rekursioon.

Funktsionaalne ja loogiline programmeerimine

Loengu ülevaade

- Rekursioon: üldpõhimõtted
- Rekursiivsed pildid
- Funktsionaalne programmeerimine
- Loogiline programmeerimine

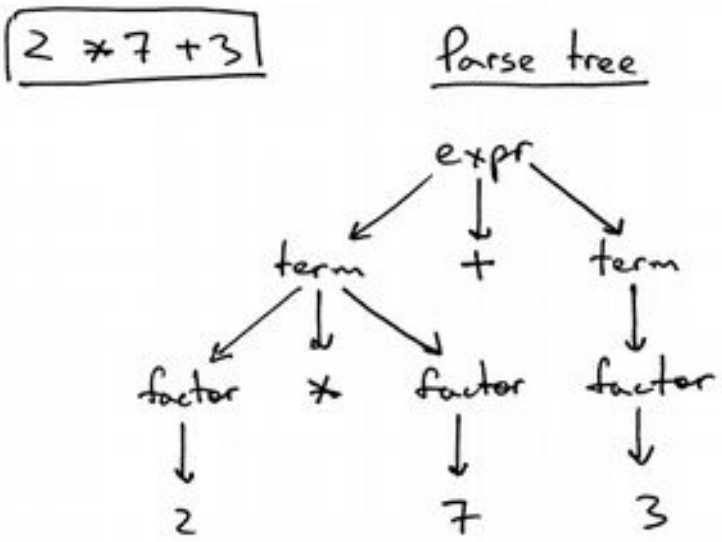


Recursion

- A subroutine is said to be recursive if **it calls itself**, either directly or indirectly.

- That is, the subroutine **is used in its own definition**.

Recursion can often be used to solve complex problems by reducing them to simpler problems of the same type.

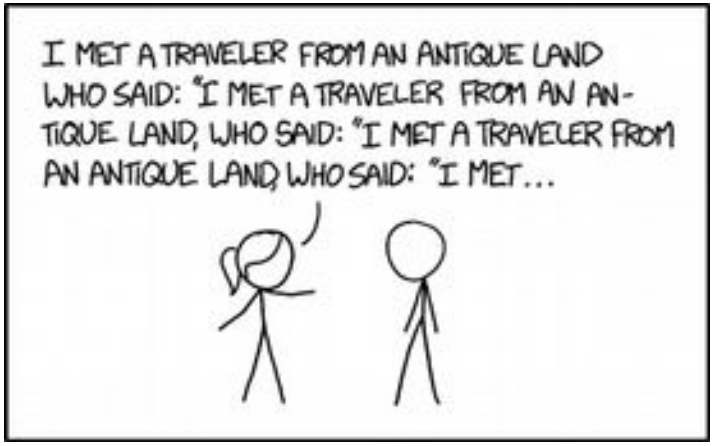


Recursion: bad kind does not terminate

- Bad kind (infinite loop which never terminates):

a car is a car

```
def fact(x):
    return fact(x)
```



Recursion: good cases terminate

- Good kind – loop is (hopefully) terminated:

An "ancestor" is either a parent or an ancestor of a parent

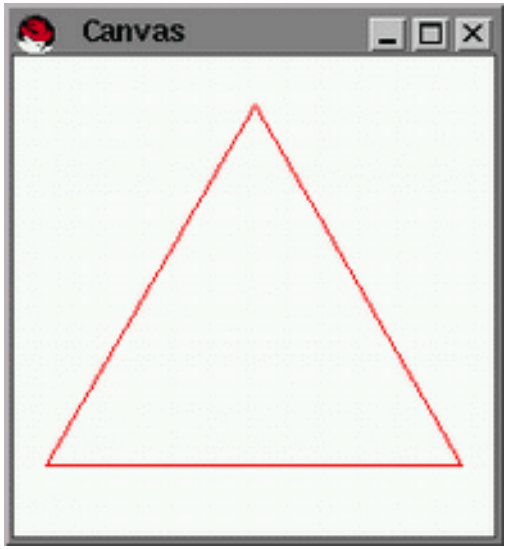
```
def fact(x):
    if x<=0: return 1
    else: return x*fact(x-1)
```

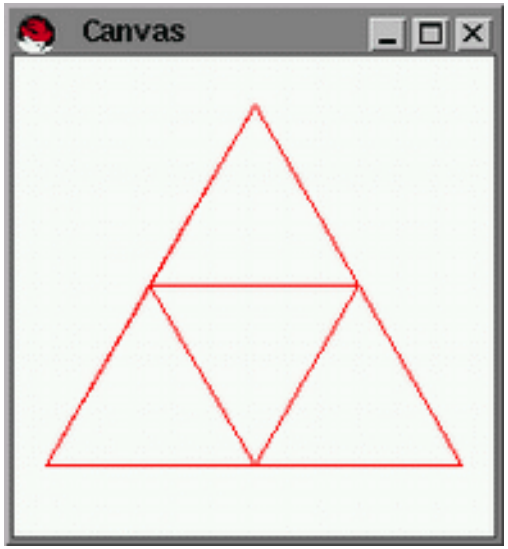
Factorial: trace

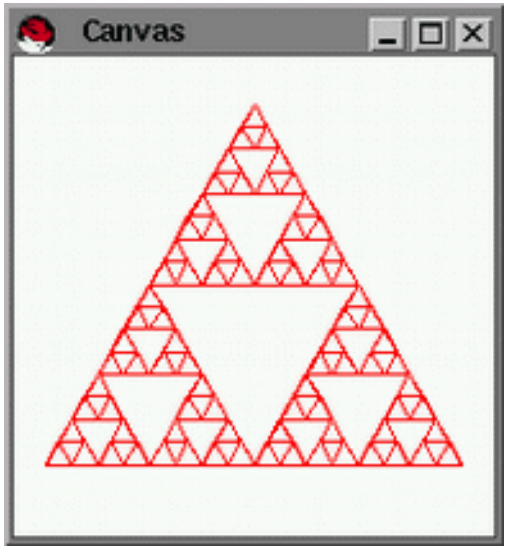
```
def fact(x):
    if x<=0: return 1
    else: return x*fact(x-1)


fact(3)
==> 3 * fact(3 - 1)
==> 3 * fact(2)
==> 3 * (2 * fact(2 - 1))
==> 3 * (2 * fact(1))
==> 3 * (2 * (1 * fact(1 - 1)))
==> 3 * (2 * (1 * fact(0)))
==> 3 * (2 * (1 * 1))
==> 6
```

Recursive objects in the world. Fractal objects

- A huge amount of of things in the real world has a recursive nature.
- For example, coastline of a sea has a **fractal** nature – fractals are recursive: their structure is repeated over and over in small details.
- Sierpinski triangle:





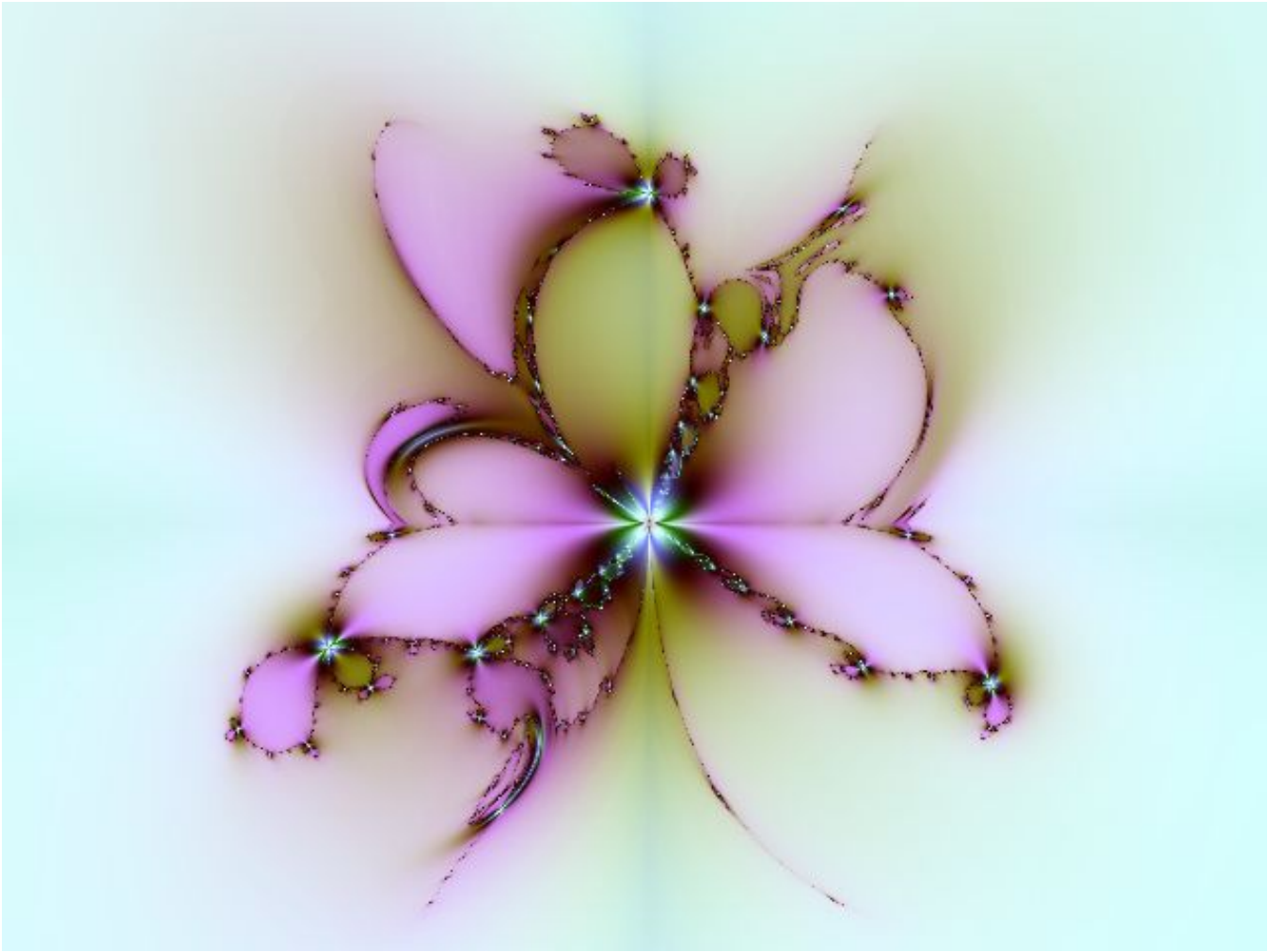


Fractals

“Evening over San Francisco”

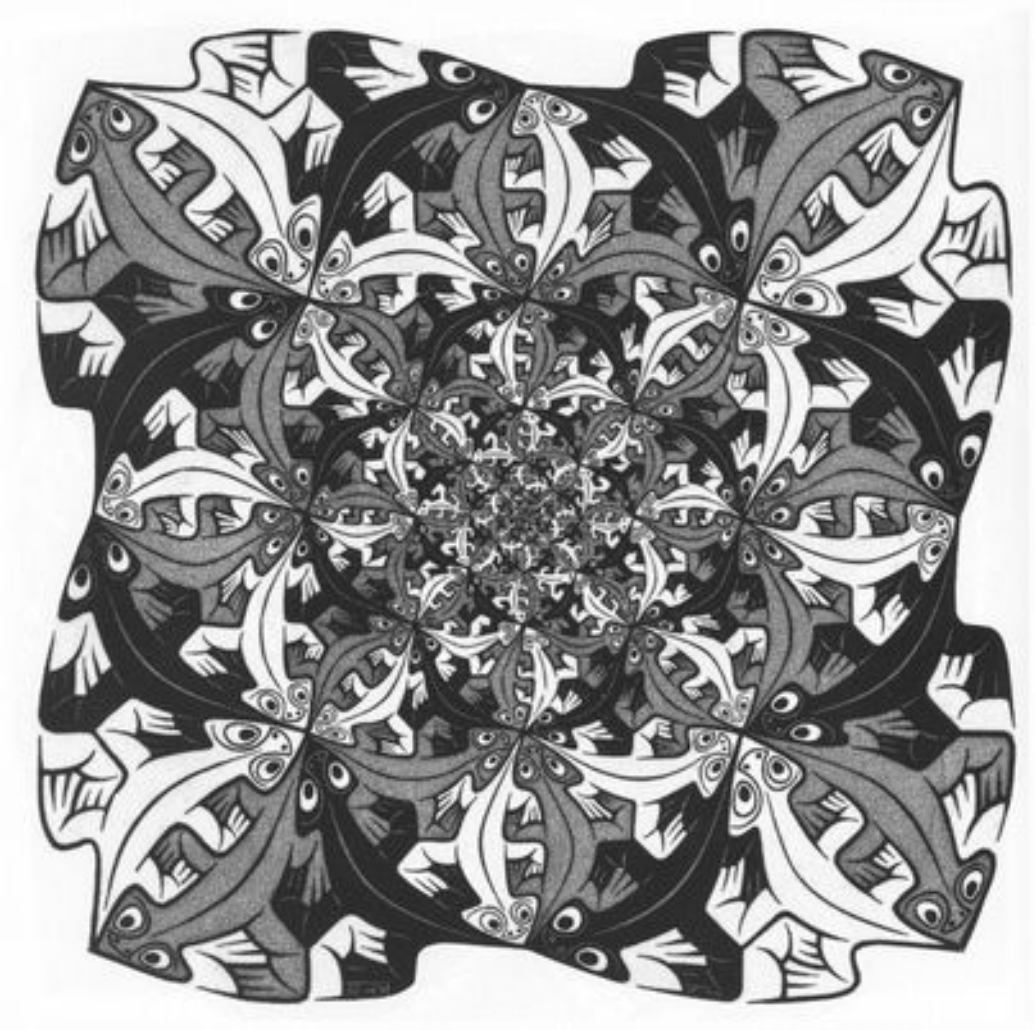
Fractals

“Nature uses as little as possible”



Fractals

M.C. Escher: smaller and smaller



Fractal/recursive objects in the real world

M.C. Escher: Three worlds

Recursive objects in the world: encoding

Recursion allows to encode a huge amount of complexity in a very efficient way.

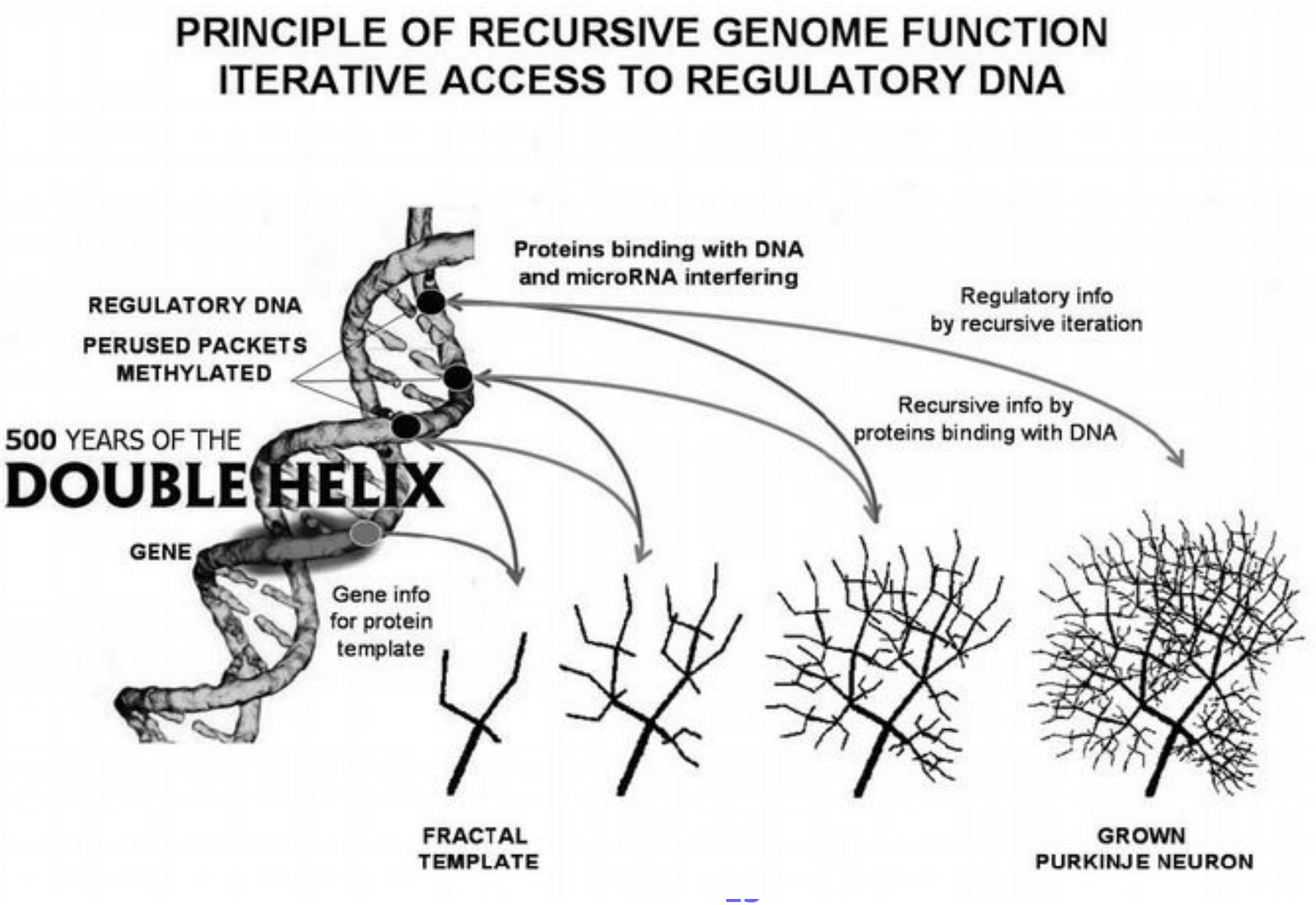
Example:

- animals are incredibly complex
- animals are constructed from blueprints: genes

- genes are very small when compared to animals
- animals contain copies of genes in huge amounts

- How is it possible?
- Animals are constructed from gene blueprints in recursive form! Animal construction constructs many small parts similarly to large parts.

Recursive objects in the world: encoding



Recursive functions: main principles

- Important to check that recursion terminates. Code should contain:
  - One or more **base cases** (no recursion involved!)
  - One or more **recursive cases.** Arguments of the recursive call must be "**simpler**" according to some measure.

    NB! The "simplicity" measure may be arbitrarily complex.

Recursive functions: main principles

- Recursion has same power as iteration:
  - Every recursive function can be written using while or for loops instead
  - Every function using while and/or for loops can be written using recursion instead
- However:
  - some programming tasks are much easier to write using recursion
  - some programming tasks are much easier to write using iteration

Direct and indirect recursive call

- A recursive subroutine is one that calls itself, either directly or indirectly.

- To say that a subroutine calls itself **directly** means that its definition contains a subroutine call statement that calls the subroutine that is being defined.
  - foo calls foo:
  - int **foo**(int x) { if (x>0) return 1+**foo**(x-1) else return 1}

- To say that a subroutine calls itself **indirectly** means that it calls a second subroutine which in turn calls the first subroutine (either directly or indirectly).
  - foo calls bar which calls foo:
  - int **foo**(int x) { if (x>0) return 2+**bar**(x-2) else return 1}
  - int **bar**(int x) { if (x>0) return 2*+**foo**(x-1) else return 1}

Tail recursion: directly convertible to iteration

- Tail recursion: recursive call is the last thing the function does.
- Tail recursive functions are typically much faster when written iteratively (unless we have a very good optimising compiler)

- **Tail recursive:**
  - int **foo**(int x) { if (x>0) return **foo(x-2)** else return 1}
  - int **foo**(int x) { if (x>0) return **foo(x-1)**

    else if (x<0) return 1 else return **foo(x-2)**

- **Not tail recursive:**
  - int **foo**(int x) { if (x>0) return **foo(x-2)+foo(x-1)** else return 1}
  - int **foo**(int x) { if (x>0) return **1+foo(x-1)** else return 1}

Graphical examples

- See, modify and program graphical examples from Eck xTurtle lab and have a look at http://math.hws.edu/graphicsbook/

- Check out nice examples in javascript:

https://progur.com/2016/10/procedural-generation-create-fractal-trees-javascript.html

https://progur.com/2017/02/create-mandelbrot-fractal-javascript.html

https://stackoverflow.com/questions/49785734/animating-a-fractal-tree-inside-a-javascript-canvas

Recursive binary search

```
static int binarySearch(int[] A, int loIndex, int hiIndex, int value) {

    if (loIndex > hiIndex) {
        return -1;
    }
    else {
        int middle = (loIndex + hiIndex) / 2;
        if (value == A[middle])
                return middle;
        else if (value < A[middle])
                return binarySearch(A, loIndex, middle - 1, value);
             else   // value must be > A[middle]
                return binarySearch(A, middle + 1, hiIndex, value);
     }
} // end binarySearch()
```

Funktsionaalne programmeerimine

- Funktsionaalsete keelte idee on programmide kirjutamine (matemaatiliste) funktsioonide defineerimise teel, määramata seejuures täpselt ära, mis strateegia järgi funktsiooni resultaati tuleb arvutada.

- Funktsioonile võib anda argumendiks teisi funktsioone ja funktsiooni arvutamise resultaadiks võib samuti olla funktsioon.

- Enamik kaasaegseid programmeerimiskeeli – Javascript, Python, Java, ... -- on funktsionaalse programmeerimise meetoditest mõjustatud ja sisaldavad funktsionaalseid osi

Näide: faktoriaal

- Defineerime näiteks faktoriaali funktsiooni fakt ja funktsiooni map , mis rakendab oma esimest, funktsionaalset argumenti teiseks argumendiks oleva loendi igale elemendile.
- Loend `[h|t]` esitatakse sisemiselt kui harilik term `.(h,t)`

```
fakt(0) = 1
fakt(x) = x*fakt(x-1)

(ehk: fakt(x) = if x=0 then 1 else x*fakt(x-1))

map(f,[]) = []
map(f,[h|t]) = [f(h) | map(f,t)]
```

- Avaldise `map(fakt,[3,5,0])` väärtuseks on `[6,120,1]`.

Avaldise väärtustamine (reduktsioon)

- Leitakse funktsiooni defineeriv "sobiv" võrdus
- Asendatakse avaldis võrduse parema poolega
- Formaalsete parameetrid asendatakse tegelike argumentidega
- Kogu protsessi korratakse kuni rohkem ei saa

```
fact 3
==> 3 * fact (3 - 1)
==> 3 * fact 2
==> 3 * (2 * fact (2 - 1))
==> 3 * (2 * fact 1)
==> 3 * (2 * (1 * fact (1 - 1)))
==> 3 * (2 * (1 * fact 0))
==> 3 * (2 * (1 * 1))
==> 6
```

Puhtad ja kombineeritud funktsionaalsed keeled

- Funktsionaalseid keeli saab jämedalt jagada kahte liiki: puhtad ja kombineeritud.

- Puhtas funktsionaalses keeles -- Haskell, Hope, Miranda, FP -- ei ole programmeerijal peale funktsioonide defineerimise ja sisseehitatud baasfunktsioonide (aritmeetika, loendid jms) mingeid lisavahendeid -- kõik kõrvalefektid on keelatud.

- Puhas funktsionaalne keel ei luba muutujatele väärtusi omistada. Ainus efekt, mis funktsiooni rakendamine argumentidele annab, on resultaadi leidmine.

- Kombineeritud funktsionaalsed keeled - ML, Lisp, Scheme - kombineerivad puhaste funktsionaalsete keelte mehhanisme imperatiivsete mehhanismidega.

Alus: lambda-arvutus

- Lambda-arvutuse keel on Alonzo Churchi poolt 1930. aastatel leiutatud lihtne ja universaalne meetod funktsioonide kirjapanekuks.

- Lambda-arvutuse teooria tegeleb arvutatavuse ja arvutatavate funktsioonide uurimisega, kasutades selleks lambda-arvutuse keelt kui universaalset programmeerimiskeelt.

- Churchi tees väidab, et iga algoritmi saab lambda-arvutuse keeles kirja panna. On võimalik näidata, et lambda-arvutus, nagu ka Prolog, C ja Basic on üks paljudest universaalsetest programmeerimiskeeltest.

- Konkreetselt on lambda-arvutuse keel ja teooria funktsionaalsete programmeerimiskeelte aluseks.

Annonüümsed funktsioonid

- üks harilikumaid praktikas kasutatavaid funktsioonide kirjapaneku viise on selline:

```
f(x) = x*x + 1
```

- Funktsioon esitatakse, andes talle samas nime, konkreetses näites `f`. Lambda-arvutuses esitatakse funktsioone, vastupidi, kui anonüümseid, nimeta terme. äsjatoodud näide on lambda-kirjaviisis

```
λ x. x*x + 1
```

- Lambda-sümboli λ järele kirjutatakse funktsiooni formaalseks parameetriks olev muutuja, seejärel punkt ja funktsiooni keha.

Lambda-arvutus

- Mitme formaalse parameetriga funktsioone esitatakse mitme üksteise sees oleva üheparameetrilise funktsioonina:

```
λ x. λ y. x*x+y*y.
```

Näide

- Funktsiooni rakendamiseks kirjutatakse traditsioonilise f(3) asemel (λ x. x*x+1) 3 -- viimase väärtuseks on 10.

- Analoogiliselt annab ((λ x. λ y. x*x+y*y) 2) 3 väärtuseks 13. Lambda-termi rakendamisel asendatakse seotud muutuja termi kehas termile antud argumendiga.

((λ f. f(f 2)) (λ x. x*x+1)) annab
(λ x. x*x+1) ((λ x. x*x+1) 2) annab
(λ x. x*x+1) (2*2+1) annab
(λ x. x*x+1) 5 annab
5*5+1 annab
26.

Resultaat seejuures asenduste tegemise järjekorrast ei sõltu.

Arvud ja muu puhtas lambda-arvutuses

- Churchi leiutatud kodeerimine:

0 : $\lambda\, f\, x.\, x$
1 : $\lambda\, f\, x.\, f\, x$
2 : $\lambda\, f\, x.\, f\, (f\, x)$
3 : $\lambda\, f\, x.\, f\, (f\, (f\, x))$

- Aritmeetika:

SUCC : $\lambda\ \ n\, f\, x.\, f\, (n\, f\, x)$
PLUS : $\lambda\ \ m\, n\, f\, x.\, n\, f\, (m\, f\, x)$

PLUS can be thought of as a function taking two natural numbers as arguments and returning a natural number;

MULT : $\lambda\ \ m\, n.\, m$ (PLUS n) 0,

Kombinatoorne loogika

- Veel minimaalsem, kui lambda-arvutus

$(\mathrm{I}\ x) = x$
$((\mathrm{K}\ x)\ y) = x$
$(\mathrm{S}\ x\ y\ z) = (x\ z\ (y\ z))$

- Given S and K, I itself is unnecessary, since it can be built from the other two:

$\mathrm{I} = \mathrm{S}\ \mathrm{K}\ \mathrm{K}$

$((\mathrm{S}\ \mathrm{K}\ \mathrm{K})\ x) = (\mathrm{S}\ \mathrm{K}\ \mathrm{K}\ x) = (\mathrm{K}\ x\ (\mathrm{K}\ x)) = x$

- Iga lambda-termi saab lihtsalt teisendada kombinaatoriteks

Loogiline programmeerimine: Prolog

- Prolog on esimene -- ja siiani kasutusel -- loogilise programmeerimise keel. Prolog-ile lisaks on välja töötatud mitmeid uuemaid loogilise programmeerimise keeli ja süsteeme.

- Prolog-i põhi-idee on nõuda otsitava lahenduse kirjeldamist esimest järku predikaatarvutuse keeles, kusjuures Prolog-i süsteem sisaldab teatud tüüpi automaatset teoreemitõetajat, mis on võimeline lahendust automaatselt otsima ja tuletama.

- Sellegipoolest ei ole Prolog siiski automaatse teoreemitõestamise süsteem: viimast realiseeriv mehhanism on Prolog-is väga piiratud, spetsiifiline ja loogiliselt mittetäielik.

Näide

- Vaatleme esimese näitena sugulussidemete andmebaasi, konkreetselt niisugust Prolog-i programmi:

```
isa(jaan,peeter).
isa(jaan,martin).
isa(martin,veiko).
isa(riivo,leo).
ema(leena,leo).
vanaisa(X,Z) :- isa(X,Y), isa(Y,Z).
vanaisa(X,Z) :- isa(X,Y), ema(Y,Z).
```

Päringud

- Päringule, kas isa(riivo,martin) on antud andmebaasist tuletatav, vastab otsingumootor eitavalt

```
?- isa(riivo,martin).
no
```

- Lahendust otsib Prologi mootor järgmiselt: kõik andmebaasis olevad laused vaadatakse järjest läbi ning püütakse iga lause esimest literaali päringu-literaaliga unifitseerida. Kui see ei õnnestu, vastatakse päringule eitavalt.

- Päringule, kas isa(riivo,leo) on antud andmebaasist tuletatav, vastab otsingumootor jaatavalt:

```
?- isa(riivo,leo).
yes
```

Päringud

- Päringud võivad sisaldada muutujaid: sellisel juhul leiab Prologi mootor lahenduse , st. muutuja asemele substitueeritava termi:

```
?- isa(jaan,X).
X=peeter
```

- Kui me ei ole rahul esimese leitud lahendusega, võime otsingumootorit instrueerida uusi lahendusi otsima, st püüdma unifitseerida päringut järgmiste andmebaasis olevate lausetega.

```
?- isa(jaan,X).
X=peeter;
X=martin;
no
```

Reeglite kasutamine

- kuidas reageerib otsingumootor päringule, kas Jaan on kellegi vanaisa:

```
?- vanaisa(jaan,X).
X=veiko
```

Loendi element?

- Kirjutame programmi `member` , mis kontrollib, kas esimene argument kuulub teiseks argumendiks olevasse loendisse:

```
member(X,[X|Z]).
member(X,[Y|Z]) :- member(X,Z).


?- member(10,[20,30,10,40]).
Yes
```

Liida loendid

```
append([],Z,Z).
append([X|Y],Z,[X|R]) :- append(Y,Z,R).

?- append([a,b],[c,d],L).
L=[a,b,c,d];
no

?- append(X,Y,[a,b,c,d]).
X=[], Y=[a,b,c,d];
X=[a], Y=[b,c,d];
X=[a,b], Y=[c,d];
X=[a,b,c], Y=[d];
X=[a,b,c,d], Y=[];
no
```

Permutatsioonid

```
perm(L, [H|T]) :- app(V,[H|U], L), app(V,U,W),
                  perm(W,T).
perm([],[]).

?- perm([a,b,c],X).
X=[a,b,c];
X=[a,c,b];
X=[b,a,c];
X=[b,c,a];
X=[c,a,b];
X=[c,b,a];
no
```